

УДК 519.7

С.В. Лутманов, Т.Ю. Кучкова, В.А. Овчинников

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-309

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ, ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ В ОКРЕСТНОСТИ БАЗОВОГО ДВИЖЕНИЯ, В УСЛОВИЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ВЕКТОР ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

Исследуются управляемая динамическая система, возмущенное движение которой требуется вернуть на ее базовое движение. Указанное возвращение осуществляется за счет введения дополнительных (к базовым) управлений. В отличие от предыдущих работ авторов здесь на дополнительные управления накладываются геометрические ограничения. Рассмотрены случаи ограничений в форме эллипсоида и в форме прямоугольного параллелепипеда.

Ключевые слова: математическая модель; линеаризованные дифференциальные уравнения; ограничения на управления; оптимальное управление.

Введение

В работе [3] была предложена методика исследования управляемой динамической системы, в рамках которой возмущенное движение системы требовалось вернуть на ее базовое движение. Указанное возвращение осуществляется путем решения задачи наведения фазового вектора линеаризованной системы на

начало координат. В статьях [5–7] при исследовании конкретных динамических объектов геометрические ограничения на вектор дополнительных управляющих параметров не накладывались. В данной работе для тех же динамических объектов, что и в указанной выше статье, такие ограничения вводятся. Рассмотрены случаи ограничений в форме эллипсоида и в форме прямоугольного параллелепипеда.

1. Базовый закон движения и базовое программное управление

Динамика управляемого динамического объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

[illegible]

где t – текущее время, y – фазовый вектор системы, v – вектор управляющих параметров. Относительно функций $Y_i: [t_0, T] \times R^{n+r} \rightarrow R^1, i = 1, \dots, n$ предполагается, что они непрерывны по совокупности своих аргументов и удовлетворяют локальным условиям Липшица по переменной $y \in R^n$. Программные управления отождествляются с интегрируемыми функциями переменного $t \in [t_0, T]$. Предполагается также, что уравнения (1.1) могут быть разрешены относительно вектора управления $v \in R^r$, т. е. приведены к виду

[illegible]

Пусть $y = \hat{y}(t), t \in [t_0, T]$ – базовый закон движения объекта. Базовое программное управление $v = \hat{v}(t), t \in [t_0, T]$, реализующее базовый закон движения, определяется путем подстановки последнего в уравнения (1.2), т.е.

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = \begin{pmatrix} V_1(t, \hat{y}_1(t), \dots, \hat{y}_n(t), \dot{\hat{y}}_1(t), \dots, \dot{\hat{y}}_n(t)) \\ \vdots \\ V_r(t, \hat{y}_1(t), \dots, \hat{y}_n(t), \dot{\hat{y}}_1(t), \dots, \dot{\hat{y}}_n(t)) \end{pmatrix}, t \in [t_0, T].$$

2. Возмущенные законы движения и линеаризованная модель управляемой динамической системы

В случае, когда начальные условия $y(t_0) = y_0$ не удастся выдержать точно, кинематический закон движения $y = y(t, t_0, y_0 + \delta y_0, \hat{v}(\cdot)), t \in [t_0, T]$ динамического объекта, порожденный управлением $v = \hat{v}(t), t \in [t_0, T]$, не будет совпадать с базовым законом.

Определение 1. Кинематический закон

$$y = y(t, t_0, y_0 + \delta y_0, \hat{v}(\cdot)), t \in [t_0, T]$$

будем называть возмущенным движением, а разность

$$\delta y(\cdot) = y(\cdot, t_0, y_0 + \delta y_0, \hat{v}(\cdot)) - \hat{y}(\cdot)$$

возмущением движения динамического объекта.

В случае если в некоторый момент времени возмущения обращаются в ноль, то, начиная с этого момента времени, возмущенное движение совпадет с базовым. Обращение в ноль возмущений будем осуществлять посредством дополнительных управлений $u_1, \dots, u_r$, которые введем в дифференциальные уравнения движения (1.1) аддитивно основным управлениям, т.е.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= Y_1(t, y_1, \dots, y_n, v_1 + u_1, \dots, v_r + u_r), \\ &\dots\dots\dots, \quad t \in [t_0, T]. \\ \dot{y}_n &= Y_n(t, y_1, \dots, y_n, v_1 + u_1, \dots, v_r + u_r) \end{aligned}$$

Приближенное описание динамики возмущений дает система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in R^r, t \in [t_0, T], \quad (2.1)$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – аппроксимация возмущения $\delta y = \begin{pmatrix} \delta y_1 \\ \dots \\ \delta y_n \end{pmatrix}$, а

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix}$ – вектор дополнительных управляющих параметров.

Матрицы $A(t)$ и $B(t)$, $t \in [t_0, T]$ вычисляются по формулам:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Y_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Y_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{\substack{y(t)=\hat{y}(t), \\ v(t)=\hat{v}(t)}},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial Y_1}{\partial v_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Y_n}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial v_r} \end{pmatrix}_{\substack{y(t)=\hat{y}(t), \\ v(t)=\hat{v}(t)}}. \quad (2.2)$$

Управляемый объект, динамика которого описывается уравнениями (2.1)–(2.2), будем называть линеаризованным динамическим объектом.

3. Задача наведения для линеаризованного динамического объекта

В предположении, что на вектор дополнительных управляющих параметров наложены геометрические ограничения в форме включения $u \in P$, где $P \subset R^r$ – выпуклый компакт, по-

ставим задачу минимизации расстояния от фазового вектора линеаризованного динамического объекта в конечный момент времени до начала координат. Символом

$$\Pi[t_0, T] = \{u(\cdot) | u(t) \in P, t \in [t_0, T]\}$$

обозначим множество всех возможных допустимых программных управлений.

Задача 1. *Определить программное управление $u^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$, для которого выполняется равенство*

$$\|x(T, t_0, x_0, u^0(\cdot))\| = \min_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \|x(T, t_0, x_0, u(\cdot))\|,$$

где символом $x(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$ обозначено движение линеаризованного динамического объекта (2.1), выходящее из начального положения (t_0, x_0) и порожденное программным управлением $u(\cdot)$.

Определение 2. *Множество*

$$G(t_0, x_0, T) = \{q = x(T, t_0, x_0, u(\cdot)) | u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]\} \subset R^n$$

называется областью достижимости управляемого динамического объекта в момент времени T для начального положения (t_0, x_0) (см. рис. 1).

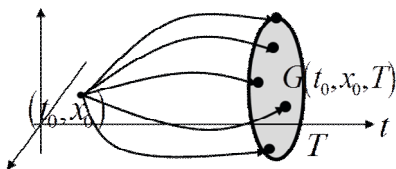


Рис. 1

Известно [2], что область достижимости является выпуклым и компактным множеством в пространстве R^n .

Определение 3. *Величина $\varepsilon^0 = \min \{\varepsilon \geq 0 | 0 \in \overline{G^\varepsilon}(t_0, x_0, T)\}$,*

где символом $\overline{G^\varepsilon}$ обозначена замкнутая ε – окрестность множества G , называется гипотетическим рассогласованием (см. рис. 2).

Очевидно, что величина гипотетического рассогласования является наименьшим расстоянием от фазового вектора системы (2.1) в конечный момент времени до начала координат, которое можно получить выбором программного управления $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$.

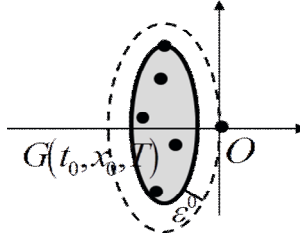


Рис. 2

Следуя работе [4], приведем основные моменты реализации алгоритма построения допустимого программного управления $u^0(\cdot)$, решающего задачу 1. Полагаем

$$H[t, \tau] = X[t, \tau]B(\tau), \quad t, \tau \in [t_0, T],$$

где $X[t, \tau]$, $t, \tau \in [t_0, T]$ – фундаментальная матрица Коши для однородного дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Матрицу $H[t, \tau]$ еще называют переходной матрицей линейного управляемого динамического объекта (2.1).

Имеет место равенство

$$\varepsilon^0 = \max \left\{ 0, \max_{\|l\|=1} \left[\langle X[T, t_0]x_0, l \rangle + \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle H[T, \tau]u, l \rangle d\tau \right] \right\}. \quad (3.1)$$

Лемма 1. Пусть $\varepsilon^0 > 0$. Тогда максимум в равенстве (3.1) достигается на единственном векторе $l^0 \in R^n$.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon^0 > 0$. Тогда программное управление $u^0(\cdot)$, решающее задачу 1, удовлетворяет равенству

$$\langle H[T, t]u^0(t), l^0 \rangle = \min_{u \in P} \langle H[T, t]u, l^0 \rangle, \quad t \in [t_0, T].$$

Заметим, что выражение $\langle H[T, t]u, l^0 \rangle$ является линейной формой по переменным $u_1, \dots, u_r$, т. е.

$$\langle H[T, t]u, l \rangle = \sum_{i=1}^r d_i(t, l_1, \dots, l_n) u_i. \quad (3.2)$$

Тогда задача об определении вектора $U^0(t, l_1, \dots, l_n)$, $t \in [t_0, T]$ – шаблона для оптимального управления – сводится к минимизации линейной формы (3.2) при выпуклых ограничениях $u \in P$.

Для некоторых классов множеств $P \subset R^n$, например, рассмотренных ниже в данной статье, эта задача допускает аналитическое решение.

После того, как определен шаблон для оптимального управления, равенство (3.1) преобразовывают к виду

$$\varepsilon^0 = \max \left\{ 0, \max_{\|l\|=1} \left[\langle X[T, t_0]x_0, l \rangle + \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^r d_i(\tau, l_1, \dots, l_n) U_i^0(\tau, l_1, \dots, l_n) d\tau \right] \right\} \quad (3.3)$$

и далее, обычно численно, решается задача математического программирования

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle X[T, t_0]x_0, \begin{pmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix} \right\rangle + \\ + \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^r d_i(\tau, l_1, \dots, l_n) U_i^0(\tau, l_1, \dots, l_n) d\tau \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^n l_i^2 = 1. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

В силу **леммы 1** в случае, если оптимальное значение целевой функции строго положительно, решение этой задачи

$$l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_n^0 \end{pmatrix} \text{ единственно.}$$

Оптимальное программное управление находится путем

подстановки вектора $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_n^0 \end{pmatrix}$ в шаблон для оптимального

управления.

Таким образом,

$$u^0(\cdot) = U^0(\cdot, l_1^0, \dots, l_n^0). \quad (3.5)$$

Проверка корректности вычислений производится путем подстановки найденного оптимального управления в дифференциальные уравнения движения линеаризованного динамического объекта (2.1) и интегрирования их с начальными условиями $x(t_0) = x_0$. Расстояние от фазового вектора объекта в конечный момент времени до начала координат должно совпасть с величиной гипотетического рассогласования $\varepsilon^0 > 0$.

4. Случай прямоугольного параллелепипеда

В данном пункте множество $P \in R^r$ имеет вид n -мерного прямоугольного параллелепипеда

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix} \middle| |u_1| \leq a_1, \dots, |u_r| \leq a_r, \quad a_i \geq 0, i = 1, \dots, r \right\}.$$

Тогда шаблон для оптимального управления определяется по формуле $U_i^0(t, l_1, \dots, l_n) = -\text{sign}[d_i(t, l_1, \dots, l_n)] \cdot a_i,$

$$t \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, r.$$

Гипотетическое рассогласование (3.3), задача математического программирования (3.4), и оптимальное программное управление (3.5) здесь принимают вид

$$\varepsilon^0 = \max \left\{ 0, \max_{\|l\|=1} \left[\langle X[T, t_0] x_0, l \rangle - \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^r a_i |d_i(\tau, l_1, \dots, l_n)| d\tau \right] \right\},$$

$$\begin{cases} \langle X[T, t_0] x_0, l \rangle - \int_{t_0}^T \sum_{j=1}^r a_j |d_j(t, l_1, \dots, l_n)| d\tau \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^n l_i^2 = 1, \end{cases}$$

$$u^0(t) = U^0(t, l_1^0, \dots, l_n^0) = \begin{pmatrix} u_1^0(t, l_1^0, \dots, l_n^0) \\ \dots \\ u_r^0(t, l_1^0, \dots, l_n^0) \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} \text{sign}[d_1(t, l_1^0, \dots, l_n^0)] \cdot a_1 \\ \dots \\ \text{sign}[d_r(t, l_1^0, \dots, l_n^0)] \cdot a_r \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T], \text{ соответственно.}$$

5. Случай эллипсоида

В данном пункте множество $P \in R^r$ имеет вид n -мерного эллипсоида

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix} \left| \frac{u_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{u_r^2}{a_r^2} \leq 1 \right. \right\}.$$

Тогда шаблон для оптимального управления определяется по формуле

$$U_i^0(t, l_1, \dots, l_n) = - \frac{d_i(t, l_1, \dots, l_n) a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^r d_i^2(t, l_1, \dots, l_n) a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Гипотетическое рассогласование (3.3), задача математического программирования (3.4), и оптимальное программное управление (3.5) здесь принимают вид

$$\varepsilon^0 = \max \left\{ 0, \max_{\|l\|=1} \left[\langle X[T, t_0]x_0, l \rangle - \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^r d_i^2(t, l_1, \dots, l_n) a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \right] \right\},$$

$$\left\{ \max_{\|l\|=1} \left[\langle X[T, t_0]x_0, l \rangle - \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^r d_i^2(t, l_1, \dots, l_n) a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \right] \rightarrow \max, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^n l_i^2 = 1, \right.$$

$$u^0(t) = U^0(t, l_1^0, \dots, l_n^0) = \begin{pmatrix} u_1^0(t, l_1^0, \dots, l_n^0) \\ \dots \\ u_r^0(t, l_1^0, \dots, l_n^0) \end{pmatrix} =$$

$$= - \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^r d_i^2(t, l_1^0, \dots, l_n^0) a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} d_1(t, l_1^0, \dots, l_n^0) a_1^2 \\ \dots \\ d_r(t, l_1^0, \dots, l_n^0) a_r^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T],$$

соответственно.

6. Модельные примеры

Пример 1 [5]. Платформа A массы m_A движется поступательно без трения вдоль горизонтальной плоскости (см. рис. 3). На платформе установлен цилиндрический шарнир, который разрешает вращаться однородному стержню B массы m_B и длиной $2l$ в плоскости, параллельной Oz . На конце стержня имеется точечный "схват" массы m_C .

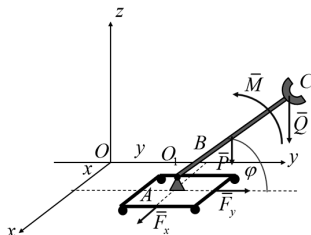


Рис. 3

К платформе приложены управляющая сила $\bar{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}$ и управ-

ляющий момент $\bar{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Обобщенные координаты x, y, φ

механизма связаны с декартовыми координатами x_C, y_C, z_C схвата формулами $x_C = x$, $y_C = y + 2l \cos \varphi$, $z_C = 2l \sin \varphi$.

Уравнения Лагранжа, разрешенные относительно старших производных имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f_1(F_x), \\ \ddot{y} &= f_2(\varphi, \dot{\varphi}, F_y, M_x), \\ \ddot{\varphi} &= f_3(\varphi, \dot{\varphi}, F_y, M_x), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(F_x) &= \frac{F_x}{m_A + m_B + m_C}, \\ f_2(\varphi, \dot{\varphi}, F_y, M_x) &= \\ &= -\frac{3l(m_B + 2m_C)[-M_x + gl(m_B + 2m_C)\cos\varphi]\sin\varphi}{l^2[4(m_A + m_B + m_C)(m_B + 3m_C) - 3(m_B + 2m_C)^2\cos 2\varphi]} + \\ &+ \frac{4l^2(m_B + 3m_C)[F_y + l(m_B + 2m_C)\cos\varphi\dot{\varphi}^2]}{l^2[4(m_A + m_B + m_C)(m_B + 3m_C) - 3(m_B + 2m_C)^2\cos 2\varphi]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f_3(\varphi, \dot{\varphi}, F_y, M_x) = \\
 & = \frac{6M_x(m_A + m_B + m_C) - 6gl(m_A + m_B + m_C)(m_B + 2m_C)\cos\varphi}{l^2 \left[5m_B^2 + 20m_Bm_C + 12m_C^2 + 8m_A(m_B + 3m_C) + 3(m_B + 2m_C)^2 \cos 2\varphi \right]} + \\
 & + \frac{6F_y l(m_B + 2m_C)\sin\varphi}{l^2 \left[5m_B^2 + 20m_Bm_C + 12m_C^2 + 8m_A(m_B + 3m_C) + 3(m_B + 2m_C)^2 \cos 2\varphi \right]} + \\
 & + \frac{3l^2(m_B + 2m_C)\sin 2\varphi \dot{\varphi}^2}{l^2 \left[5m_B^2 + 20m_Bm_C + 12m_C^2 + 8m_A(m_B + 3m_C) + 3(m_B + 2m_C)^2 \cos 2\varphi \right]}.
 \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения (6.1) нормализуются заменой

$$p_1 = x, p_2 = y, p_3 = \varphi, p_4 = \dot{x}, p_5 = \dot{y}, p_6 = \dot{\varphi},$$

$$v_1 = F_x, v_2 = F_y, v_3 = M_x.$$

и приводятся к виду

$$\dot{p}_1 = p_4,$$

$$\dot{p}_2 = p_5,$$

$$\dot{p}_3 = p_6,$$

$$\dot{p}_4 = f_1(v_1),$$

$$\dot{p}_5 = f_2(p_3, p_6, v_2, v_3),$$

$$\dot{p}_6 = f_3(p_3, p_6, v_2, v_3).$$

Базовое программное управление, реализующее базовый закон движения $p_i = \hat{p}_i(t), t \in [t_0, T], i = 1, \dots, 6$

вычисляется по формулам

$$\hat{v}_1(t) = (m_A + m_B + m_C) \dot{\hat{p}}_4(t),$$

$$\hat{v}_2(t) = -(lm_B + 2m_C) \cos \hat{p}_3(t) \dot{\hat{p}}_6^2(t) -$$

$$-l(m_B + 2m_C) \sin \hat{p}_3(t) \dot{\hat{p}}_6(t) + (m_A + m_B + m_C) \dot{\hat{p}}_5(t),$$

$$\hat{v}_3(t) = \frac{1}{3}l \left[4l(m_B + 3m_C) \dot{\hat{p}}_6(t) - 3(m_B + 2m_C) \sin \hat{p}_3(t) \dot{\hat{p}}_5(t) \right] +$$

$$+ glm_B \cos \hat{p}_3(t) + 2glm_C \cos \hat{p}_3(t).$$

Строится линеаризованная система дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $t \in [t_0, T]$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in R^6, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in R^3,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial p_3} & 0 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial p_6} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial p_3} & 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial p_6} \end{pmatrix}_{\substack{p=\hat{p}(t), \\ v=\hat{v}(t)}},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} & \frac{\partial f_2}{\partial v_3} \\ 0 & \frac{\partial f_3}{\partial v_2} & \frac{\partial f_3}{\partial v_3} \end{pmatrix}_{\substack{p=\hat{p}(t), \\ v=\hat{v}(t)}}, \quad t \in [t_0, T].$$

В примере приняты следующие числовые данные:

$$m_A = 10 \text{ кг}, m_B = 4 \text{ кг}, m_C = 2 \text{ кг}, l = 1 \text{ м},$$

$$g = 9.8, \frac{\mathcal{M}}{\text{сек}^2}, t_0 = 0 \text{ сек}, T = 1 \text{ сек},$$

$$x_C^0 = y_C^0 = z_C^0 = 0.5 \text{ м}, x_C^1 = y_C^1 = z_C^1 = 1 \text{ м},$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_C^0 &= 0, \dot{y}_C^0 = 0, \dot{z}_C^0 = 0 \frac{M}{сек}, \\ x_{Cvoz}^0 &= 0.55 M, y_{Cvoz}^0 = 0.45 M, z_{Cvoz}^0 = 0.45 M, \\ \dot{x}_{Cvoz}^0 &= \dot{y}_{Cvoz}^0 = 0 = \dot{z}_{Cvoz}^0 = 0 \frac{M}{сек}.\end{aligned}$$

В случае прямоугольного параллелепипеда принимается, что

$$a_1 = 3 \frac{кг \cdot M}{сек^2}, \quad a_2 = 3.5 \frac{кг \cdot M}{сек^2}, \quad a_3 = 1.5 \frac{кг \cdot M^2}{сек^2}.$$

В результате расчетов были получены траектории схвата, отвечающие базовому, возмущенному и откорректированному движению. Они приведены на рис. 4.

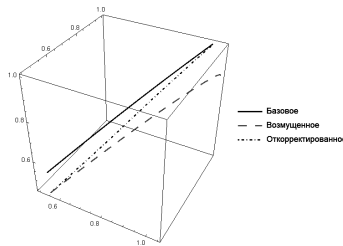


Рис. 4

Из рис. 4 видно, что в конечный момент времени положение схвата, отвечающее откорректированному движению, значительно ближе к эталонному, нежели его положение отвечающее возмущенному движению. Этот факт подтверждается и численно. Действительно,

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x_{Cvoz}(T) - x_C^1)^2 + (y_{Cvoz}(T) - y_C^1)^2 + (z_{Cvoz}(T) - z_C^1)^2} = \\&= 0.132499 > 0.0043008 = \\&= \sqrt{(x_{Ckor}(T) - x_C^1)^2 + (y_{Ckor}(T) - y_C^1)^2 + (z_{Ckor}(T) - z_C^1)^2}.\end{aligned}$$

В случае эллипсоида принимается, что

$$a_1 = 4.4 \frac{кг \cdot M}{сек^2}, \quad a_2 = 6 \frac{кг \cdot M}{сек^2}, \quad a_3 = 4 \frac{кг \cdot M^2}{сек^2}.$$

По аналогии с предыдущим случаем были получены траектории схвата, отвечающие базовому, возмущенному и откорректированному движению. Они приведены на рис. 5.

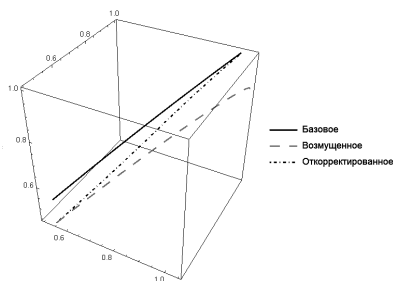


Рис. 5

Из рис. 5 видно, что в конечный момент времени положение схвата, отвечающее откорректированному движению, значительно ближе к эталонному, нежели его положение отвечающее возмущенному движению. Этот факт подтверждается и численно. Действительно,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_{Cvoz}(T) - x_C^1)^2 + (y_{Cvoz}(T) - y_C^1)^2 + (z_{Cvoz}(T) - z_C^1)^2} = \\ & = 0.132499 > 0.00148817 = \\ & = \sqrt{(x_{Ckor}(T) - x_C^1)^2 + (y_{Ckor}(T) - y_C^1)^2 + (z_{Ckor}(T) - z_C^1)^2}. \end{aligned}$$

Пример 2 [6]. Абсолютно твердое тело вращается относительно неподвижной точки O (см. рис. 6).

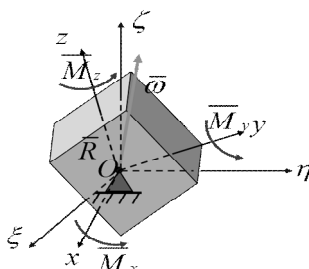


Рис. 6

С телом связана подвижная система координат $Oxyz$, оси которой совпадают с главными осями инерции. Тензор инерции тела и вектор мгновенной угловой скорости в этой системе координат имеют вид

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

$$\text{К телу приложен управляющий момент } \bar{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}.$$

Положение тела относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ определяется углами Эйлера φ, ψ, θ , а скорость его вращения – проекциями вектора угловой скорости p, q, r на оси подвижной системы координат.

Дифференциальные уравнения движения тела, разрешенные относительно производных имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{p} &= P(q, r, M_{Ox}), & \dot{\varphi} &= \Phi(p, q, \varphi, \theta), \\ \dot{q} &= Q(p, r, M_{Oy}), & \dot{\psi} &= \Psi(p, q, \varphi, \theta), \\ \dot{r} &= R(p, q, M_{Oz}), & \dot{\theta} &= \Xi(p, q, \varphi), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} P(q, r, M_{Ox}) &= -\frac{C-B}{A}qr + \frac{1}{A}M_{Ox}, \\ Q(p, r, M_{Oy}) &= -\frac{A-C}{B}rp + \frac{1}{B}M_{Oy}, \\ R(p, q, M_{Oz}) &= -\frac{B-A}{C}pq + \frac{1}{C}M_{Oz}, \\ \Phi(p, q, \varphi, \theta) &= -p \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta - q \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta + r, \\ \Psi(p, q, \varphi, \theta) &= q \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} + p \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \\ \Xi(p, q, \varphi) &= p \cos \varphi - q \sin \varphi. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения (6.2) нормализуются заменой

$$p = p_1, q = p_2, r = p_3, \varphi = p_4, \psi = p_5, \theta = p_6,$$

$$M_{Ox} = v_1, M_{Oy} = v_2, M_{Oz} = v_3$$

и приводятся к виду

$$\dot{p}_1 = P(p_2, p_3, v_1),$$

$$\dot{p}_2 = Q(p_1, p_3, v_2),$$

$$\dot{p}_3 = R(p_1, p_2, v_3),$$

$$\dot{p}_4 = \Phi(p_1, p_2, p_4, p_6),$$

$$\dot{p}_5 = \Psi(p_1, p_2, p_4, p_6),$$

$$\dot{p}_6 = \Xi(p_1, p_2, p_4),$$

Базовое программное управление, реализующее базовый закон движения

$$p_i = \hat{p}_i(t), t \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, 6$$

вычисляется по формулам

$$\hat{v}_1(t) = A\dot{\hat{p}}_1(t) + (C - B)\hat{p}_2(t)\hat{p}_3(t),$$

$$\hat{v}_2(t) = B\dot{\hat{p}}_2(t) + (A - C)\hat{p}_3(t)\hat{p}_1(t),$$

$$\hat{v}_3(t) = C\dot{\hat{p}}_3(t) + (B - A)\hat{p}_1(t)\hat{p}_2(t).$$

Строится линеаризованная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [t_0, T].$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in R^6, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in R^3,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P}{\partial p_6} \\ \frac{\partial Q}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial Q}{\partial p_6} \\ \frac{\partial R}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial R}{\partial p_6} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \Phi}{\partial p_6} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \Psi}{\partial p_6} \\ \frac{\partial \Xi}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \Xi}{\partial p_6} \end{pmatrix}_{\substack{p=\hat{p}(t), \\ v=\hat{v}(t)}},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial v_1} & \frac{\partial P}{\partial v_2} & \frac{\partial P}{\partial v_3} \\ \frac{\partial Q}{\partial v_1} & \frac{\partial Q}{\partial v_2} & \frac{\partial Q}{\partial v_3} \\ \frac{\partial R}{\partial v_1} & \frac{\partial R}{\partial v_2} & \frac{\partial R}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial v_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \Xi}{\partial v_1} & \frac{\partial \Xi}{\partial v_2} & \frac{\partial \Xi}{\partial v_3} \end{pmatrix}_{\substack{p=\hat{p}(t), \\ v=\hat{v}(t)}}, \quad t \in [t_0, T].$$

В примере приняты следующие числовые данные

$$A=10\kappa_2 \cdot \mathcal{M}^2, B=8\kappa_2 \cdot \mathcal{M}^2, C=6\kappa_2 \cdot \mathcal{M}^2, \varphi_0=0.5 \text{ рад}, \psi_0=0.3 \text{ рад}, \theta_0=0.5 \text{ рад},$$

$$\dot{\varphi}_0=0.1 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\psi}_0=0.3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\theta}_0=0.2 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$\varphi_1=0.3 \text{ рад}, \psi_1=0.2 \text{ рад}, \theta_1=0.7 \text{ рад},$$

$$\dot{\varphi}_1=0.3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\psi}_1=0.2 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\theta}_1=0.3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$\varphi_{0\text{voz}}=\varphi_0 \cdot 1.08 \text{ рад}, \psi_{0\text{voz}}=\psi_0 \cdot 0.95 \text{ рад}, \theta_{0\text{voz}}=\theta_0 \cdot 1.03 \text{ рад},$$

$$\dot{\varphi}_{0\text{voz}}=\dot{\varphi}_0 \cdot 0.9 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\psi}_{0\text{voz}}=\dot{\psi}_0 \cdot 1.1 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\theta}_{0\text{voz}}=\dot{\theta}_0 \cdot 0.9 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$t_0=0 \text{ сек}, T=1 \text{ сек}.$$

В случае прямоугольного параллелепипеда принимается, что

$$a_1 = 0,6 \frac{\kappa \mathcal{E} \cdot \mathcal{M}}{\text{сек}^2}, \quad a_2 = 1 \frac{\kappa \mathcal{E} \cdot \mathcal{M}}{\text{сек}^2}, \quad a_3 = 0,8 \frac{\kappa \mathcal{E} \cdot \mathcal{M}^2}{\text{сек}^2}.$$

В результате расчетов были получены траектории фазового вектора нормализованной системы (6.2), отвечающие базовому, возмущенному и откорректированному движению.

На рис. 7. приведены эти траектории в проекции на подпространство углов

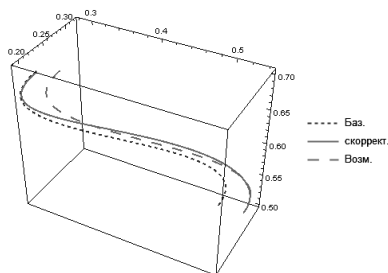


Рис. 7

Из рис. 7 видно, что в конечный момент времени положение проекции фазового вектора на свои угловые координаты, отвечающее откорректированному движению, значительно ближе к эталонному, нежели его положение отвечающее возмущенному движению. Этот факт подтверждается и численно.

Действительно,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\varphi_{\text{voz}}(T) - \varphi_1)^2 + (\psi_{\text{voz}}(T) - \psi_1)^2 + (\theta_{\text{voz}}(T) - \theta_1)^2} = \\ & = 0,03936 > 0,00151 = \\ & = \sqrt{(\varphi_{\text{kor}}(T) - \varphi_1)^2 + (\psi_{\text{kor}}(T) - \psi_1)^2 + (\theta_{\text{kor}}(T) - \theta_1)^2}. \end{aligned}$$

Аналогичные результаты имеют место и для проекции фазового вектора на подпространство угловых скоростей p, q, r .

В случае эллипсоида принимается, что

$$a_1 = 0,6 \frac{\kappa \mathcal{E} \cdot \mathcal{M}}{\text{сек}^2}, \quad a_2 = 1 \frac{\kappa \mathcal{E} \cdot \mathcal{M}}{\text{сек}^2}, \quad a_3 = 0,8 \frac{\kappa \mathcal{E} \cdot \mathcal{M}^2}{\text{сек}^2}.$$

По аналогии с предыдущим случаем были получены траектории фазового вектора нормализованной системы (6.2), отвечающие базовому, возмущенному и откорректированному движению.

На рис. 8 приведены эти траектории в проекции на подпространство углов.

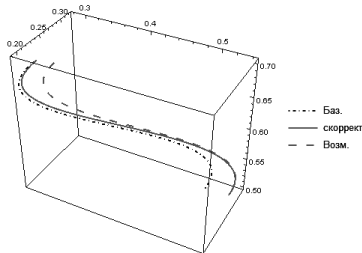


Рис. 8

Из рис. 8 видно, что в конечный момент времени положение проекции фазового вектора на свои угловые координаты, отвечающее откорректированному движению, значительно ближе к эталонному, нежели его положение отвечающее возмущенному движению. Этот факт подтверждается и численно. Действительно,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\varphi_{voz}(T) - \varphi_1)^2 + (\psi_{voz}(T) - \psi_1)^2 + (\theta_{voz}(T) - \theta_1)^2} = \\ & \quad = 0,03936 > 0,00397 = \\ & \quad = \sqrt{(\varphi_{kor}(T) - \varphi_1)^2 + (\psi_{kor}(T) - \psi_1)^2 + (\theta_{kor}(T) - \theta_1)^2}. \end{aligned}$$

Заключение

1. В статье решена задача наведения фазового вектора линеаризованной системы на начало координат в условиях геометрических ограничений на векторы дополнительных управляющих параметров. Рассмотрены случаи ограничений в форме эллипсоидов и форме прямоугольных параллелепипедов.

2. Показано, что в случае строгой положительности гипотетического рассогласования возмущение можно привести в окрестность начала координат, радиус которой совпадает с величиной гипотетического рассогласования.

3. Численно подтверждено, что дополнительные управления, решающие задачу наведения для линеаризованного динамического объекта, приводят возмущенное движение в положение, близкое к заданному по постановке задачи финальному положению.

Библиографический список

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

2. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений М.: Наука, 1970. 420 с.

3. *Лутманов С.В.* Об одной методике исследования управляемой динамической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(36). С. 13–20.

4. *Лутманов С.В.* Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие / Перм. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.

5. *Кучкова Т.Ю., Лутманов С.В.* Задачи управления одной динамической системой с тремя степенями свободы // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 25–36.

6. *Лутманов С.В., Овчинников В.А.* Оптимальная коррекция движения твердого тела, вращающегося относительно неподвижной точки // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 37–50.

7. *Лутманов С.В., Кучкова Т.Ю., Овчинников В.А.* Сравнительный анализ результатов управления динамической системой, линеаризованной в окрестности базового движения, по критериям "минимум энергии" и "минимум силы" // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1(40). С. 19–26.